Algorítmo para Procedimento de Baskhara sem que ocorra a subtração catastrófica para quaisquer entradas

Filipi Damasceno Vianna
filipi@em.pucrs.br

Professor Dalcidio Cláudio
Cálculo Numérico

Porto Alegre, 6 de setembro de 2004.

Tarefa

Foi pedido um algorítmo que executasse o procedimento de Baskhara sem que ocorresse a subtração catastrófica, para quaisquer entradas.

Baskhara

O gráfico da figura 1 demostra como se comporta a equação 1.

$$x^2 - 3x - 2 \tag{1}$$

Figura 1: Gráfico da parábola com b=-3.

Resolvendo a equação 1 encontramos duas raízes $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$.

O gráfico da figura 2 demostra como se comporta a equação 2.

$$x^2 - 4x - 2 \tag{2}$$

Figura 2: Gráfico da parábola com b=-4.

Resolvendo a equação 2 encontramos duas raízes $x_1 = 2 + \sqrt{2}$ e $x_2 = 2 - \sqrt{2}$.

Graficando a equação 3, na figura 3 percebemos que a equação ainda tem duas raízes. Porém, como temos o termo independente "$c = 2$", diferente de zero, sabemos que a nenhuma das raízes é zero.

$$x^2 - 1^7 x - 2 \tag{3}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a} \tag{4}$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c \tag{5}$$

O Problema

No computador, resolvendo a equação 3 utilizando o procedimento de Baskhara (equação 4), com um

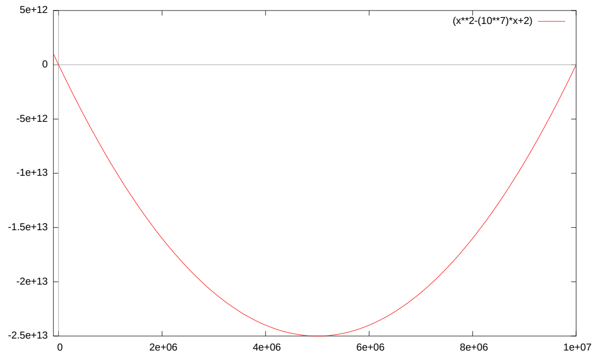

Figura 3: Gráfico da parábola com b=-1E7.

negativo, com seu valor em módulo muito alto, como na equação 3, notamos que uma das raízes encontradas é zero. Isto acontece devido a maneira como o computador trabalha com números muito pequenos, neste, caso resultado da subtração de "$-b - \sqrt{\Delta}$", para contornar este problema, podemos utilizar um algorítmo que calcule cada raíz de forma diferente,

$$x_1, x_2 = \frac{c}{a} \tag{6}$$

Desta maneira, quando $b > 0$, calculamos x_1 pela equacao 6 e x_2 por Baskhara (equação 4) e quando $b < 0$ calculamos x_1 por Baskhara e x_2 pela equação 6.

Com este procedimento podemos construir um algorítmo, neste caso utilizando a linguagem FORTRAN, para comprovar o procedimento.

A Solução

A seguir temos um programa escrito utilizando a linguagem FORTRAN, neste programa podemos ver o procedimento de Baskhara sendo realizado tanto pela maneira tradicional, com as duas raízes sendo encontradas pela equação 4 e posteriormente pelo algoritmo adequado.

Neste programa são utilizados como parâmetros, os valores de $a = 1$, $b = -10^7$ e $c = 1$. Com estes valores, sabemos que a equação possui duas raízes distintas e que uma nenhma das raízes é zero, pois $c \neq 0$. Com esses parâmetros, sabemos que a função se comporta como o gráfico da figura 3 com nenhuma raíz igual a zero.

```
PARAMETER (a=1,b=-10**7,c=1)

COMMON x1, x2

PRINT *,'Parametros:'
PRINT *,'a: ',a
PRINT *,'b: ',b
PRINT *,'c: ',c

PRINT *,'Resolvendo as duas raizes com Baskhara'
PRINT *, 'x1=(-b-sqrt(b**2-4*a*c))/(2*a)'
PRINT *, 'x2=(-b+sqrt(b**2-4*a*c))/(2*a)'
x1=(-b-sqrt(b**2-4*a*c))/(2*a)
x2=(-b+sqrt(b**2-4*a*c))/(2*a)
PRINT *,'x1:',x1
PRINT *,'x2:',x2
PRINT *,'===================================='

PRINT *, 'Resolvendo agora com o algoritmo adequado:'

IF (b.ge.0) THEN
  PRINT *, 'x1=c/a'
  PRINT *, 'x2=(-b+sqrt(b**2-4*a*c))/(2*a)'
  x1=c/a
  x2=(-b-sqrt(b**2-4*a*c))/(2*a)
ELSE
  PRINT *, 'x1=(-b+sqrt(b**2-4*a*c))/(2*a)'
  PRINT *, 'x2=c/a'
  x1=(-b+sqrt(b**2-4*a*c))/(2*a)
  x2=c/a
ENDIF

PRINT *,'x1:',x1
PRINT *,'x2:',x2

STOP
END
```

Compilando e executando o programa, temos a seguinte saída:

```
Parametros:
a:   1.
b:  -10000000.
c:   1.
Resolvendo as duas raizes com Baskhara
x1=(-b-sqrt(b**2-4*a*c))/(2*a)
x2=(-b+sqrt(b**2-4*a*c))/(2*a)
x1:  0.
x2:  10000000.
=====================================
Resolvendo agora com o algoritmo adequado:
x1=(-b+sqrt(b**2-4*a*c))/(2*a)
x2=c/a
x1:  10000000.
x2:  1.
```

Desta forma, podemos verificar que se calculássemos as duas raízes por Baskhara, encontraríamos uma raíz igual a zero, o que sabemos que está errado. Porém, com o algoritmo adequado, percebemos que na realidade a raíz dada como zero é na realidade 1.