Aplicações de Equações Diferenciais de Segunda Ordem

Fernanda de Menezes Ulguim   Filipi Damasceno Vianna

Cálculo Diferencial e Integral B
Professor Luiz Eduardo Ourique

Porto Alegre, outubro de 2003.

Escolha do Problema

Molas Vibrantes

Consideremos o movimento de um objeto com massa m na extremidade de uma mola que está ou na vertical (como na figura 1) ou na horizontal sobre o nível da superfífie (como na figura 2).

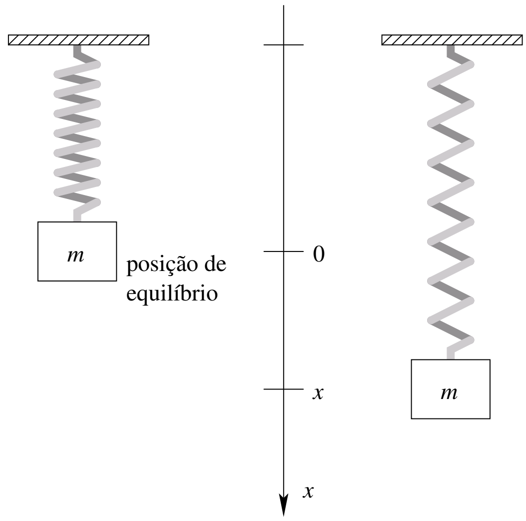


Figura 1: Sistema massa/mola na vertical.

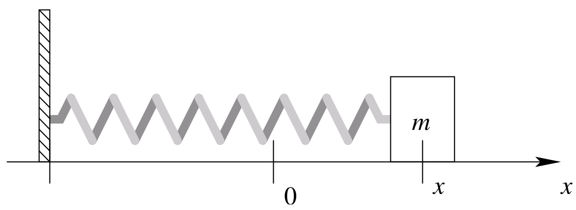


Figura 2: Sistema massa/mola na horizontal.

Segundo a Lei de Hooke, se a mola estiver esticada (ou comprimida) x unidades do comprimento natural, então ela exerce uma força proporcional a x:

$$\text{força restauradora} = -kx$$

onde k é uma constante positiva (chamada **constante da mola**). Se ignorarmos qualquer força de resistência externa (devido à resistência do ar ou atrito), então, pela Segunda Lei de Newton (força é igual a massa vezes acelereção), teremos:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \text{ ou } m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \tag{1}$$

Esta é uma equação diferencial linear de segunda ordem. Sua equação auxiliar é $mr^2 + k = 0$ com as raízes $r = \pm\omega i$, onde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Assim, a solução geral é:

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \text{sen } \omega t$$

que pode também ser escrita como

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

onde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\text{(freqüência)} \tag{2}$$

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\text{(amplitude)} \tag{3}$$

$$\cos\delta = \frac{C_1}{A}$$

$$\text{sen } \delta = -\frac{C_2}{A}$$

(δ é o ângulo de fase)

Motivo da Escolha

Foi escolhido o problema das molas vibrantes para que o grupo encontrasse um exemplo diferente do demonstrado em aula pelo professor. Exemplo este que demonstrava o uso de equações diferenciais de segunda ordem na resolução de problemas com circuitos elétricos.

Casos Particulares

Vibrações Amortecidas

A seguir consideraremos o movimento de uma mola que está sujeita a uma força de atrito (no caso da mola horizontal da figura 2) ou uma força de amortecimento (no caso de uma mola vertical que se movimenta através de um fluido, como na figura 3). Um exemplo é a força de amortecimento proporcionada pelo choque absorvido em carro ou bicicleta.

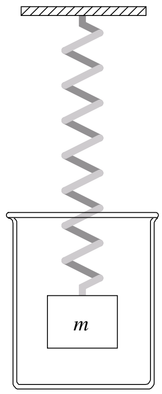


Figura 3: Sistema massa/mola através de fluido.

Vamos supor que a força de amortecimento seja proporcional à velocidade da massa. e atue na direção oposta ao movimento. (Isso tem sido confirmado, pelo menos aproximadamente, para alguns experimentos físicos.) Assim

$$\text{força de amortecimento} = -c\frac{dx}{dt}$$

onde c é uma constante positiva, chamada **constante de amortecimento**. Assim, nesse caso, a Segunda Lei de Newton fornece

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \text{força restauradora} + \text{força de amortecimento} = -kx - c\frac{dx}{dt}$$

ou

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{4}$$

A equação 4 é uma equação diferencial linear de segunda ordem, e sua equação auxiliar é $mr^2 + cr + k = 0$. As raízes são

$$r_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad r_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \tag{5}$$

Com essas raízes, precisamos discutir três casos

Caso I - $c^2 - 4mk > 0$ **(superamortecimento)**

Nesse caso r_1 e r_2 são **raízes distintas** e

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

Caso II - $c^2 - 4mk = 0$ **(amortecimento crítico)**

Nesse caso r_1 e r_2 são **raízes iguais**

$$r_1 = r_2 = -\frac{c}{2m}$$

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-(c/2m)t}$$

Caso III - $c^2 - 4mk < 0$ **(subamortecido)**

Nesse caso r_1 e r_2 são **raízes complexas**

$$\left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}\right\} = -\frac{c}{2m} \pm \omega i$$

onde

$$\omega = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}$$

A solução é dada por

$$x = e^{-(c/2m)t}(C_1 \cos \omega t + C_2 \text{sen } \omega t)$$

Exemplos Numéricos

Exemplo 1

Dados

- massa = 2 kg
- comprimento natural = 0,5 m
- comprimento esticada = 0,7 m

- força restauradora = 25,6 N
- velocidade inicial = 0

Desenvolvimento

$x = 0,7 - 0,5 = 0,2$ m
$k(0,2) = 25,6$
logo $k = \frac{25,6}{0,2} = 128$

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 128x = 0$$

$$x(t) = C_1 \cos 8t + C_2 \text{sen } 8t$$

$$x'(t) = -8C_1 \text{sen } 8t + 8C_2 \cos 8t$$

$$x'(0) = 0$$

$$C_2 = 0$$

$$x(t) = \frac{1}{5} \cos 8t$$

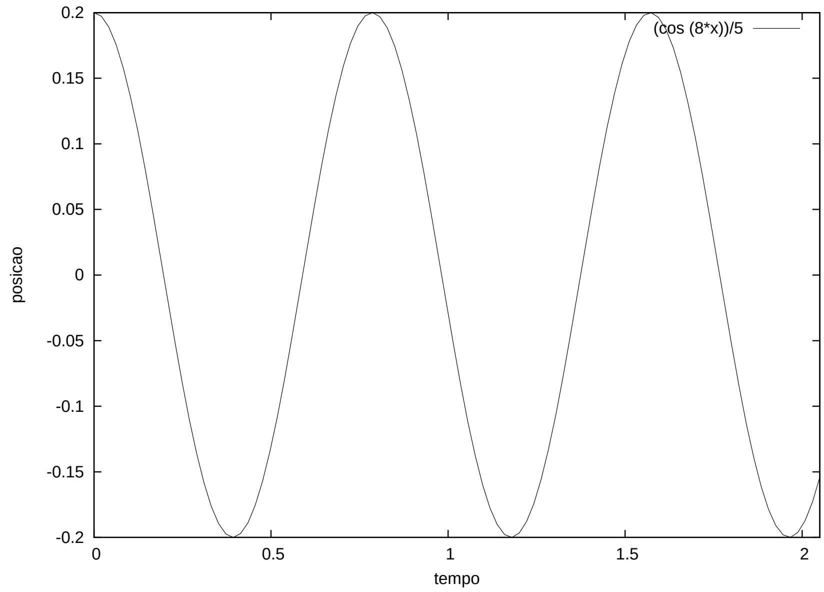
O gráfico da figura 4 mostra que ao longo do tempo, a posição da massa fica variando de -0,2 m a 0,2 m.

Disso, podemos tomar que a amplitude, dada pela equação 3 é

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \\ &= \sqrt{C_2^2} \\ &= \sqrt{0,2^2} \\ &= 0,2 \end{aligned} \tag{6}$$

Exatamente como mostrado no gráfico da figura 4

E a freqüência, dada pela equação 2 é



posição × tempo
$0 < t < 2{,}05$
-0,2 $< x <$ 0,2

Figura 4: Gráfico da posição em função do tempo.

$$\begin{aligned}
\omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\
&= \sqrt{\frac{128}{2}} \\
&= \sqrt{64} \\
&= 8 \text{ ciclos por unidade de tempo} \qquad (7)
\end{aligned}$$

Vemos que o sistema permace oscilando *ad infinutum* com a freqüência dada pela equação 7 e amplitude dada pela equação 6.

Exemplo 2 - com amortecimento

Dados

- massa = 2 kg

- comprimento natural = 0,5 m
- comprimento esticada = 0,7 m
- força restauradora = 25,6 N
- velocidade inicial = 0
- constante de amortecimento = 40

Desenvolvimento

$x = 0,7 - 0,5 = 0,2$ m
$k(0,2) = 25,6$
$c = 40$
logo $k = \frac{25,6}{0,2} = 128$

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 40\frac{dx}{dt} + 128x = 0$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 20\frac{dx}{dt} + 64x = 0$$

A equação auxiliar é $r^2 + 20r + 64 = (r+4)(r+16) = 0$ com raízes -4 e -16, logo o movimento é superamortecido e a solução é

$$x(t) = C_1e^{-4t} + C_2e^{-16t}$$

Estamos dando que x(0) = 0, logo $C_1 + C_2 = 0$. Diferenciando obtemos

$$x'(t) = -4C_1e^{-4t} - 16C_2e^{-16t}$$

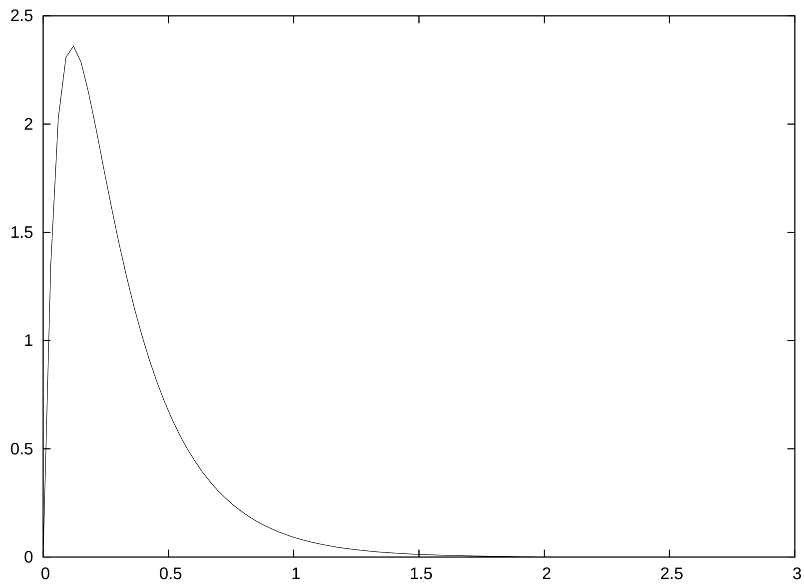
logo

$$x'(0) = -4C_1 - 16C_2$$

Uma vez que $C_2 = -C_1$, isso nos fornece que $12C_1 = 0,6$ ou $C_1 = 0,05$. Portanto:

$$x = 0,05(e^{-4t} - e^{-16t})$$

Analizando este resultado, vemos que o sistema massa/mola, tem uma rápida desaceleração e nem mesmo apresenta uma oscilação com ciclo completo.



posição $\times$ tempo
$0 < t < 3$

Figura 5: Gráfico da posição em função do tempo.

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, Howard. *Cálculo Um Novo Horizonte* 6.ed. Porto Alegre : Bookman, 2000. v.2

[2] SHENK, Al. *Cálculo e Geometria Analítica* . São Paulo : Editora Campus, 1984. v.2

[3] STEWART, James. *Cálculo* 4.ed. São Paulo : Pioneira Thompson Learning, 2001. v.2