Lista de Exercícios
Método da Bissecção e Método de Newton

Filipi Damasceno Vianna
filipi@em.pucrs.br

Professor Dalcidio Cláudio
Cálculo Numérico
Porto Alegre, 23 de setembro de 2004.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1 Dado o polinômio 1

$$f(x) = x^3 - 11x^2 - 11x - 10 \tag{1}$$

- Verificar o número de raízes negativas, positivas ou complexas

$$\begin{array}{cccccc} f(x) = & x^3 & -11x^2 & -11x & -10 & \\ T & + & - & - & - & \text{1 troca} \\ f(-x) = & (-x)^3 & -11(-x^2) & -11(-x) & -10 & \\ T' & - & - & + & - & \text{2 trocas} \end{array}$$

Reais Positivas	Reais Negativas	Complexas	Total
1	2	0	3
1	0	2	3

- Determinar o intervalo de existência de uma raiz real

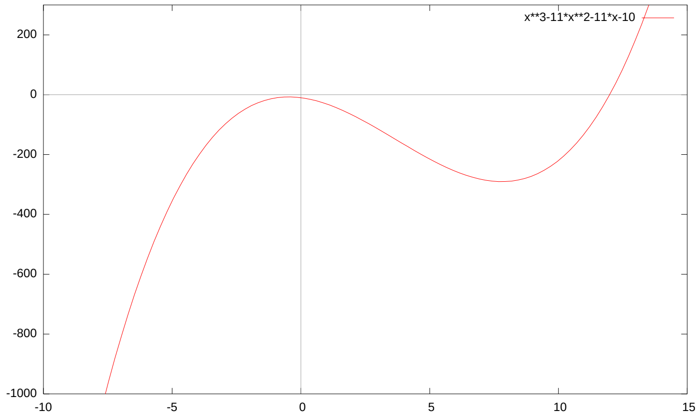

Figura 1: Gráfico do polinômio 1

Pelo gráfico da figura 1 vemos que a raíz positiva está entre +10 e +15.

- Usando o intervalo do item anterior utilizar o *Método da Bissecção* de forma a obter essa raiz real com 5 casas exatas.

  Com o seguinte programa, escrito em `FORTRAN`, obteve-se a tabela 1, pelo método da bissecção.

```
PROGRAM BISSECCAO

 COMMON a, b, fa, fb, fab, xm, fxm, fafxm, fxmfb, I

 a=10
 b=15

 fa=a**3-11*a**2-11*a-10
 fb=b**3-11*b**2-11*b-10
 fab=fa*fb

 IF (fab.GT.0) THEN
   PRINT *,'Erro na entrada!'
   STOP
 ENDIF

 xm=0.5*(a+b)
 fxm=xm**3-11*xm**2-11*xm-10
 I=0
```

```
PRINT *,'            I & a &  b & xm & f(xm)\\\\'
PRINT *,'           ',I,'&', a,'&', b,'&', xm,'&',fxm, '\\\\'

DO I=1,30,1
  xm=0.5*(a+b)
  fxm=xm**3-11*xm**2-11*xm-10
  fa=a**3-11*a**2-11*a-10
  fafxm=fa*fxm
  IF (fafxm.LT.0) THEN
    b=xm
    fb=fxm
  ELSE
    a=xm
    fa=fxm
  ENDIF
  PRINT *,'           ',I,'&', a,'&', b,'&', xm,'&',fxm, '\\\\'
ENDDO

STOP
END
```

Na tabela 1 verificamos que a partir da 24^a iteração os valores de a, b, xm e $f(xm)$ começam a se repedir, com isso, constatamos que a **raíz real do polinômio 1 é 11.9872341**

2 Data a equação 2

$$g(x) = e^{-3x} - 2x \tag{2}$$

- Determinar o intervalo de existência de uma raíz real;

  Pelo gráfico da figura 2 vemos que a raíz está entre 0 e +1.

- A partir deste intervalo obtido no ítem anterior fazer uma aplicação do *Método da Bisseção*;

  Com este intervalo e com algumas alterações no programa anterior, obtemos o seguinte programa, que gera a tabela 2, pelo *Método da Bissecção*.

```
PROGRAM BISSECCAO

 COMMON a, b, fa, fb, fab, xm, fxm, fafxm, fxmfb, I
```

I	a	b	xm	$f(xm)$
0	10.	15.	12.5	86.875
1	10.	12.5	12.5	86.875
2	11.25	12.5	11.25	-102.109375
3	11.875	12.5	11.875	-17.2363281
4	11.875	12.1875	12.1875	32.322998
5	11.875	12.03125	12.03125	6.93066406
6	11.953125	12.03125	11.953125	-5.30456543
7	11.953125	11.9921875	11.9921875	0.774902344
8	11.9726562	11.9921875	11.9726562	-2.27429199
9	11.9824219	11.9921875	11.9824219	-0.752075195
10	11.9824219	11.9873047	11.9873047	0.0108642578
11	11.9848633	11.9873047	11.9848633	-0.370727539
12	11.986084	11.9873047	11.986084	-0.179931641
13	11.9866943	11.9873047	11.9866943	-0.0844726562
14	11.9869995	11.9873047	11.9869995	-0.0368041992
15	11.9871521	11.9873047	11.9871521	-0.0129699707
16	11.9872284	11.9873047	11.9872284	-0.000991821289
17	11.9872284	11.9872665	11.9872665	0.00482177734
18	11.9872284	11.9872475	11.9872475	0.00196838379
19	11.9872284	11.9872379	11.9872379	0.000366210938
20	11.9872332	11.9872379	11.9872332	-0.000305175781
21	11.9872332	11.987236	11.987236	0.000152587891
22	11.9872341	11.987236	**11.9872341**	-7.62939453E-05
23	11.9872351	11.987236	11.9872351	-9.15527344E-05
24	11.9872351	11.987236	11.987236	0.000152587891
25	11.9872351	11.987236	11.987236	0.000152587891
26	11.9872351	11.987236	11.987236	0.000152587891
27	11.9872351	11.987236	11.987236	0.000152587891
28	11.9872351	11.987236	11.987236	0.000152587891
29	11.9872351	11.987236	11.987236	0.000152587891
30	11.9872351	11.987236	11.987236	0.000152587891

Tabela 1: Método da Bissecção para $f(x) = x^3 - 11x^2 - 11x - 10$

```
a=0
b=1

fa=exp(-3*a)-2*a
fb=exp(-3*b)-2*b

fab=fa*fb
```

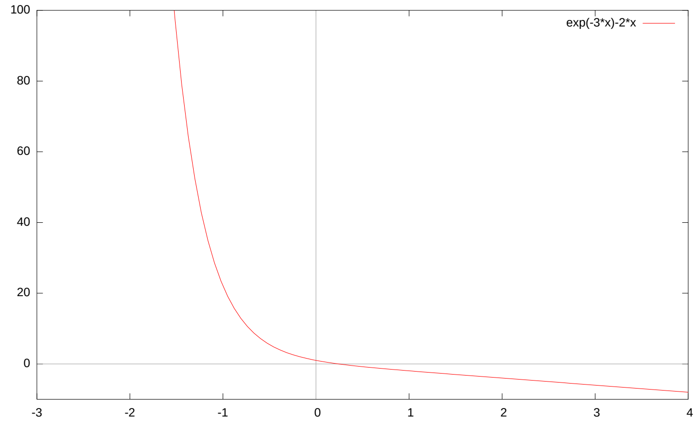

Figura 2: Gráfico da equação 2

```
IF (fab.GT.0) THEN
  PRINT *,'Erro na entrada!'
  STOP
ENDIF

xm=0.5*(a+b)
fxm=exp(-3*xm)-2*xm
I=0

PRINT *,'           I & a &  b & xm & f(xm)\\\\'
PRINT *,'          ',I,'&', a,'&', b,'&', xm,'&',fxm, '\\\\'

DO I=1,30,1
  xm=0.5*(a+b)
  fxm=exp(-3*xm)-2*xm
  fa=exp(-3*a)-2*a
  fafxm=fa*fxm
  IF (fafxm.LT.0) THEN
    b=xm
    fb=fxm
  ELSE
    a=xm
    fa=fxm
  ENDIF
  PRINT *,'          ',I,'&', a,'&', b,'&', xm,'&',fxm, '\\\\'
ENDDO

STOP
```

```
END
```

I	a	b	xm	$f(xm)$
0	0.	1.	0.5	-0.776869833
1	0.	0.5	0.5	-0.776869833
2	0.	0.25	0.25	-0.0276334584
3	0.125	0.25	0.125	0.437289298
4	0.1875	0.25	0.1875	0.194782853
5	0.21875	0.25	0.21875	0.0812931657
6	0.234375	0.25	0.234375	0.0262858868
7	0.234375	0.2421875	0.2421875	-0.000806599855
8	0.23828125	0.2421875	0.23828125	0.0127060413
9	0.240234375	0.2421875	0.240234375	0.00594139099
10	0.241210938	0.2421875	0.241210938	0.0025652945
11	0.241699219	0.2421875	0.241699219	0.000878840685
12	0.241943359	0.2421875	0.241943359	3.60012054E-05
13	0.241943359	0.24206543	0.24206543	-0.000385344028
14	0.241943359	0.242004395	0.242004395	-0.000174671412
15	0.241943359	0.241973877	0.241973877	-6.93500042E-05
16	0.241943359	0.241958618	0.241958618	-1.66893005E-05
17	0.241950989	0.241958618	0.241950989	9.65595245E-06
18	0.241950989	0.241954803	0.241954803	-3.51667404E-06
19	0.241952896	0.241954803	0.241952896	3.06963921E-06
20	0.241952896	0.24195385	0.24195385	-2.08616257E-07
21	0.241953373	0.24195385	0.241953373	1.43051147E-06
22	0.241953611	0.24195385	0.241953611	5.96046448E-07
23	0.241953731	0.24195385	0.241953731	1.78813934E-07
24	0.24195379	0.24195385	**0.24195379**	0.
25	0.24195382	0.24195385	0.24195382	-8.94069672E-08
26	0.241953835	0.24195385	0.241953835	-1.49011612E-07
27	0.24195385	0.24195385	0.24195385	-2.08616257E-07
28	0.24195385	0.24195385	0.24195385	-2.08616257E-07
29	0.24195385	0.24195385	0.24195385	-2.08616257E-07
30	0.24195385	0.24195385	0.24195385	-2.08616257E-07

Tabela 2: Método da Bissecção para $g(x) = e^{-3x} - 2x$.

Pela tabela 2 encontramos a **raíz igual a 0.24195379**.

- Usar o valor obtido no item anterior e aplicar o *Método de Newton* para obter essa raíz com 4 casas exatas.

  Para usar o *Método de Newton* devemos calcular a derivada de primeira ordem da equação 2, apresentada na equação 3

$$g'(x) = (e^{-3x}.(-3)) - 2 = -3e^{-3x} - 2 \tag{3}$$

Com essa derivada, escrevemos o seguinte programa, calculando $x_{i+1} = x_i - \frac{g(x_i)}{g'(x_i)}$:

```
PROGRAM NEWTON

COMMON I,xi,xip1

xi=0

do I=1,15,1

  xip1=xi-((exp(-3*xi)-2*xi)/((exp(-3*xi))*(-3)-2))
  PRINT *,'        $x_{',I,'}=', xip1, '$\\\\'
  xi=xip1

ENDDO

STOP
END
```

Com este programa obtemos os seguintes resultados para x_{i+1}:

$x_1 = 0.200000003$
$x_2 = 0.240810171$
$x_3 = 0.241952956$
$x_4 = 0.24195379$
$x_5 = 0.24195379$
$x_6 = 0.24195379$
$x_7 = 0.24195379$
$x_8 = 0.24195379$
$x_9 = 0.24195379$
$x_{10} = 0.24195379$
$x_{11} = 0.24195379$
$x_{12} = 0.24195379$
$x_{13} = 0.24195379$
$x_{14} = 0.24195379$
$x_{15} = 0.24195379$

Notamos que a partir da quarta iteração, as raízes começam a se repetir. Notamos, com isso, que pelo *Método de Newton* as iterações convergem muito mais rápido que pelo *Método da Bissecção*, onde as raízes começaram a convergir na vigésima-sexta iteração.