

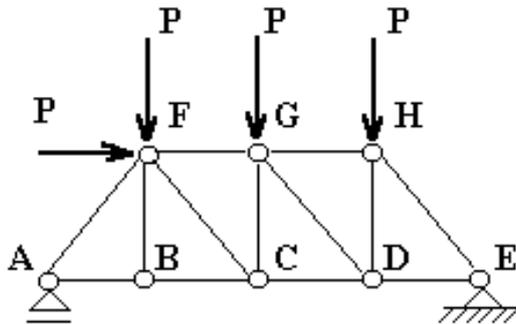
CAPÍTULO IV

TRELIÇAS ISOSTÁTICAS

I. DEFINIÇÃO:

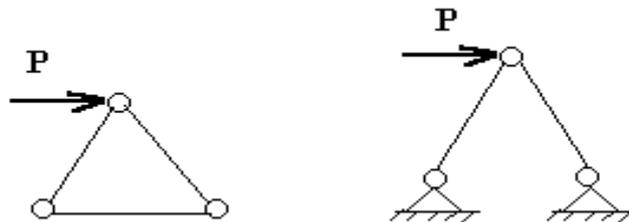
Treliça ideal é um sistema reticulado indeformável cujas barras possuem todas as suas extremidades rotuladas e cujas cargas estão aplicadas nestas rótulas.

Exemplo:

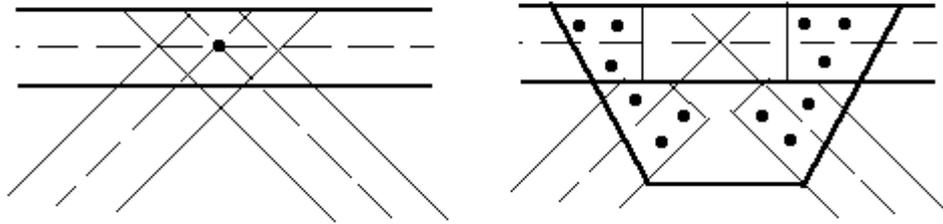


OBSERVAÇÕES:

- Qualquer polígono que constitua um sistema reticulado, quando articulado em seus vértices é deformável (hipostático) com exceção dos casos abaixo:



- As treliças surgiram como um sistema mais econômico que as vigas para vencerem vãos maiores ou suportar cargas maiores.
- Embora o caso mais geral seja o de treliças espaciais, o mais frequente é o de treliças planas, que será o estudado em nosso curso.
- Imaginam-se as barras rotuladas em suas extremidades (isto é, sendo livre sua rotação relativa nos nós), conforme figura (a). Não é frequente, no entanto, a união destas barras nesta forma, sendo mais comum ligar as barras nos nós através de chapas auxiliares, nas quais rebitamos, soldamos ou parafusamos as barras concorrentes (fig. b)



Estas ligações criarão sempre pequenas restrições à livre rotação relativa das barras nos nós, com o aparecimento de pequenos momentos nas barras, mas são pequenos e desprezados o seu efeito.

Estudos realizados demonstram que, desde que todas as barras tenham seus eixos no mesmo plano e que estes eixos se encontrem em um único ponto em cada nó, os resultados reais diferem muito pouco dos resultados obtidos pela teoria que vamos desenvolver, sendo ela válida do ponto de vista prático.

II. TRELIÇAS PLANAS

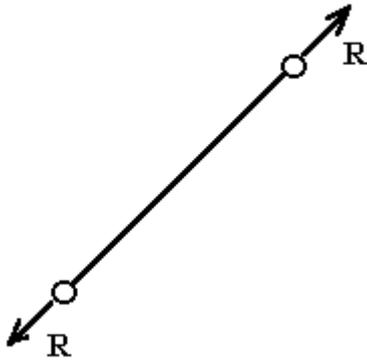
A. Solicitações Internas

Podemos facilmente demonstrar que as barras de uma treliça por terem suas extremidades rotuladas (rótulas não absorvem momento), desenvolvem apenas esforços normais constantes ao longo de suas barras.

Isto pode ser visualizado isolando-se uma barra de uma treliça.

Sabe-se que uma rótula não transmite momento, apenas esforços na direção do eixo e perpendiculares a ele. Por outro lado, as cargas externas só estão aplicadas nos nós.

A análise do equilíbrio mostra que nas extremidades das barras de uma treliça só existem esforços na direção do eixo longitudinal da mesma e que são de mesmo módulo, porém sentidos contrários. A existência de esforços perpendiculares ao eixo da barra (esforço cortante) é descartada pois as barras não são carregadas ao longo de seu eixo, e tem nas suas extremidades momentos nulos.



Conclusão: A única solicitação interna desenvolvida é um Esforço Normal **constante** ao longo da mesma.

Como o esforço normal é constante ao longo da barra podemos calcular o seu valor em uma seção qualquer, da barra que se deseja.

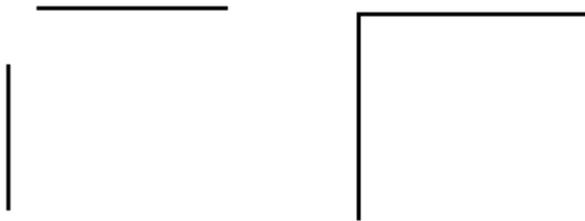
B. Rótulas

Vínculo interno é todo o elemento que une as partes componentes de uma estrutura.

No caso plano podem ser de 2ª e 3ª espécie.

1. Vínculo interno de 3ª espécie

Sejam duas barras livres no espaço com carregamento plano:

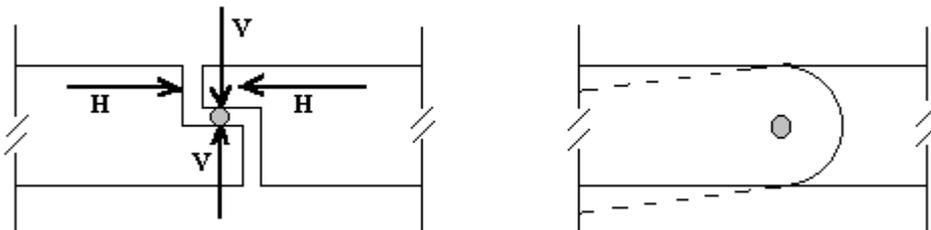


Cada barra tem 3 GL ,portanto, juntas somam 6 GL.

Unindo-as rigidamente ,por exemplo, através de uma solda, o número de GL do conjunto passa a ser 3, portanto 3 GL restringidos.

Se chamarmos de RT o número de movimentos restringidos de um sistema teremos neste caso $RT = 3$ (vínculo de 3ª espécie)

2. Vínculo de 2ª espécie (PINOS OU RÓTULAS)



Representação Estrutural :



São vínculos que podem desenvolver reações internas verticais e horizontais podendo transmitir forças nestas direções que se anulam internamente. Permitem apenas o giro relativo entre as barras por ela unidas.

Rótulas são vínculos internos de segunda espécie

Para que as rótulas de uma estrutura estejam em equilíbrio é necessário que o momento polar das cargas externas em relação à elas seja nulo.

C. Classificação da estaticidade de uma treliça

Sejam:

b - número de barras

n - número de nós ou rótulas

r - número de reações externas

As incógnitas do problema serão em número de $b + r$, ou seja, o número de reações e a sollicitação de esforço normal em cada barra.

O número de equações será de $2n$, pois em cada nó se aplicam as equações de equilíbrio de um ponto material ($\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$).

Então, se

$r + b < 2n$ treliça hipostática

$r + b = 2n$ Sugere tratar-se de uma treliça isostática, o que não pode ser confirmado sem antes analisarmos os apoios externos e a lei de formação interna da treliça em questão.

$r + b > 2n$ Sugere tratar-se de uma treliça hiperestática, sendo válidas as observações feitas no caso anterior.

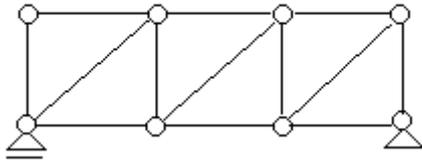
D. Classificação da treliça quanto à lei de formação

Quanto a formação as treliças podem ser :

1. Simples :

A treliça será simples se puder ser obtida a partir de configurações indeformáveis pela adição de duas a duas barras partindo nós já existentes para novos nós (um novo nó para cada duas novas barras).

Exemplo:

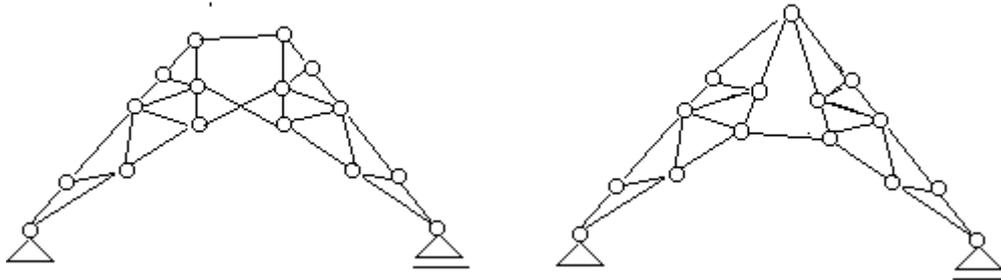


2. Composta

A treliça é isostática e composta quando for formada por duas treliças simples ligadas por 3 barras não simultaneamente concorrentes ou paralelas, ou por um nó e uma barra sendo que esta barra não concorre no nó citado.

A resolução de uma treliça composta pode recair no caso de duas treliças simples, mediante o cálculo prévio dos esforços nos elementos de ligação, o que permitirá isolá-las para fins de cálculo estático.

Exemplo:

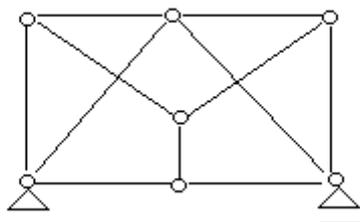


3. Complexa:

Uma treliça complexa é classificada por exclusão, ou seja, quando não é simples e nem composta. Observe que não podemos afirmar se ela é isostática pela simples análise de $\mathbf{b} + \mathbf{r} = 2 \mathbf{n}$ que é uma condição necessária, mas não suficiente para garantir a isostaticidade.

O reconhecimento de sua real classificação é feito pelo método de Henneberg.

Exemplo:



III. MÉTODO DE RESOLUÇÃO DAS TRELIÇAS ISOSTÁTICAS SIMPLES

O cálculo dos esforços normais nas barras de uma treliça isostática simples pode ser feito de tres maneiras:

- Método dos nós
- Método de Ritter ou das seções
- Método de Cremona
- Métodos Computacionais

No curso vamos nos ater ao método dos nós, já que o método de Cremona, por ser um método gráfico está em desuso com a aplicação da mecanização dos cálculos (informática).

A. Cálculo dos esforços normais nas barras pelo método dos nós.

É o método natural de resolução que consiste em se estudar o equilíbrio de cada nó isolado.

Deve-se **INICIAR E PROSEGUIR** pelos nós que possuam apenas duas incógnitas à determinar (esforço normal de 2 barras).

Aplicam-se as equações de equilíbrio estático em cada nó:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0$$

Note-se que se o nó tiver mais de duas barras à serem determinadas (2 incógnitas), 2 equações não bastam para a solução do sistema.

ROTEIRO:

- 1 - Cálculo das reações externas (se necessário)
- 2 - Escolha do 1º nó à ser examinado
- 3 - Aplicação das equações de equilíbrio no nó escolhido
- 4 - Resolvido o primeiro nó, passamos ao segundo sempre com o cuidado de verificar se ele acresce apenas duas incógnitas (2 barras à serem determinadas)

OBS: Este método apresenta o problema de acumular os erros de cálculos que por acaso forem cometidos.

B. Cálculo dos esforços normais usando o método de Ritter ou método das seções.

Vimos que pelo método dos nós, devemos seguir uma ordem de cálculo e calculamos os esforços em todas as barras de uma treliça.

O método de Ritter permite que se calculem os esforços normais apenas em algumas barras que possam nos interessar.

ROTEIRO:

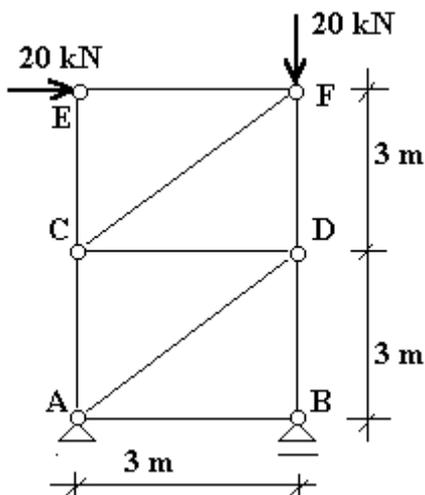
- 1 –C álculo das reações externas se necessário
- 2 - Cortar a treliça por seções de Ritter que devem:
 - a. Atravessar toda a treliça dividindo-a em 2 partes
 - b. Interceptar no máximo 3 barras que não sejam ao mesmo tempo paralelas ou concorrentes(os esforços normais destas barras serão os calculados)
 - c. Cortada a treliça em duas partes, substitui-se a parte retirada pelos esforços normais desenvolvidos pelas barras cortadas, que devem ser calculados, de maneira que as partes fiquem em equilíbrio.
 - d. Os esforços normais serão encontrados pelo equilíbrio das partes, podendo-se dispor além das equações fundamentais de equilíbrio estático, da condição de nó onde a soma dos momentos em qualquer nó da treliça deve ser zero, pois rótulas não absorvem momento.

OBSERVAÇÃO:

Este método acrescenta mais condições as já conhecidas e são usadas as condições que nos parecerem mais convenientes, podendo-se facilmente mesclar os dois métodos.

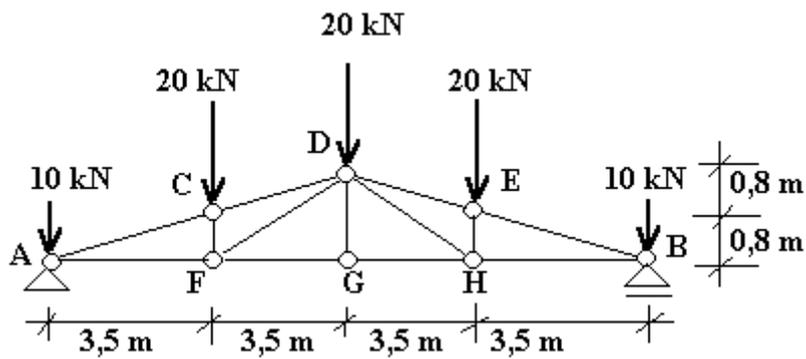
EXERCÍCIOS:

1.



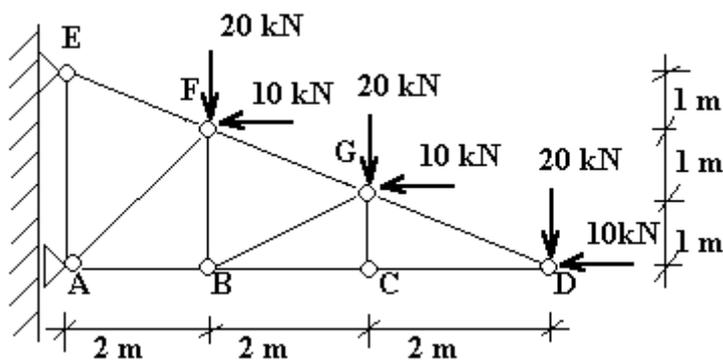
$$\begin{aligned}
 V_A &= -40 \text{ kN} & H_A &= 20 \text{ kN} (\leftarrow) \\
 V_B &= 60 \text{ kN} \\
 \text{R: Esforços normais:} \\
 N_{AB} &= 0 \\
 N_{AC} &= +20 \text{ kN} \\
 N_{AD} &= +28,28 \text{ kN} \\
 N_{BD} &= -60 \text{ kN} \\
 N_{CD} &= -20 \text{ kN} \\
 N_{CE} &= 0 \\
 N_{CF} &= +28,28 \text{ kN} \\
 N_{EF} &= -20 \text{ kN} \\
 N_{DF} &= -40 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

2.



Respostas: $V_A = 40 \text{ kN}$ $b_B = 40 \text{ kN}$
 $N_{AC} = N_{CD} = -136,4 \text{ kN}$
 $N_{AF} = 132,3 \text{ kN}$ $N_{FD} = +47,6 \text{ kN}$
 $N_{FG} = +89 \text{ kN}$ $N_{DG} = 0$
 $N_{CF} = -20 \text{ kN}$

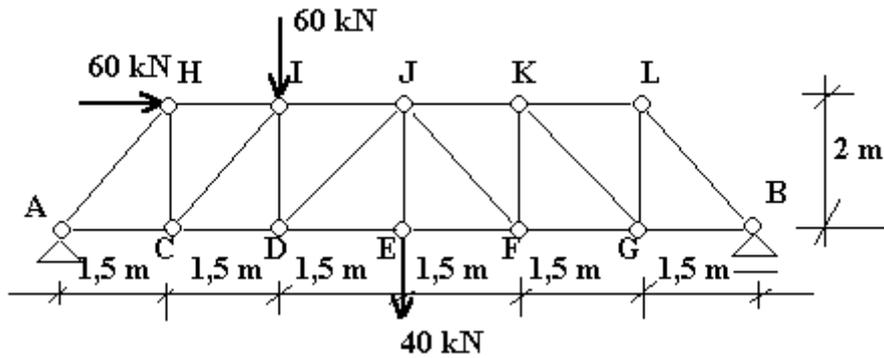
3.



Respostas:

$N_{DC} = -50,45 \text{ kN}$
 $N_{DG} = +45,45 \text{ kN}$
 $N_{CB} = -50,45 \text{ kN}$
 $N_{CE} = 0$

4.



Respostas:

$$V_A = 46,7 \text{ kN}$$

$$H_A = 60 \text{ kN}(\leftarrow)$$

$$V_B = 53,4 \text{ kN}$$

$$N_{AH} = -58,4 \text{ kN}$$

$$N_{AC} = +95,02 \text{ kN}$$

$$N_{HC} = +46,6 \text{ kN}$$

$$N_{HI} = -94,9 \text{ kN}$$

$$N_{CD} = +129,9 \text{ kN}$$

$$N_{ID} = -30,9 \text{ kN}$$

$$N_{DJ} = -13,4 \text{ kN}$$