

CAPÍTULO III

ESTRUTURAS ISOSTÁTICAS - NOÇÕES INICIAIS

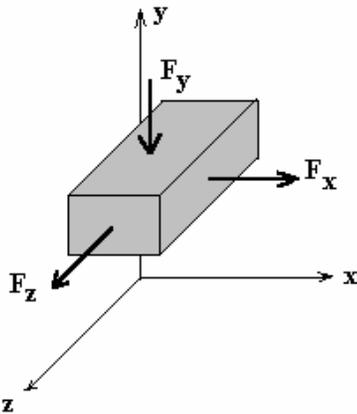
I. GRAUS DE LIBERDADE (GL)

DEFINIÇÃO: Graus de liberdade são o número de movimentos rígidos possíveis e independentes que um corpo pode executar.

A. Caso espacial

Estruturas submetidas a forças em todas as direções do espaço. Estas forças podem ser reduzidas a três direções ortogonais entre si (x, y, z), escolhidas como referência. Neste caso o corpo possui 6 graus de liberdade pois pode apresentar 3 translações (na direção dos 3 eixos) e 3 rotações (em torno dos 3 eixos).

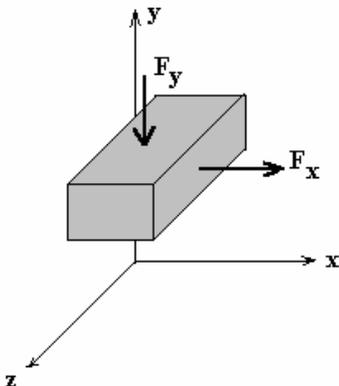
Exemplo:



B. CASO PLANO

Estruturas submetidas a forças atuantes em um só plano, por exemplo x, y . Neste caso possuem 3 graus de liberdade pois podem apresentar 2 translações (na direção dos dois eixos) e 1 rotação (em torno do eixo perpendicular ao plano que contém as forças externas).

Exemplo:



II. VÍNCULOS

A. DEFINIÇÃO:

É todo o elemento de ligação entre as partes de uma estrutura ou entre a estrutura e o meio externo, cuja finalidade é restringir um ou mais graus de liberdade de um corpo.

A fim de que um vínculo possa cumprir esta função, surgem, no mesmo, reações exclusivamente na direção do movimento impedido.

OBS 1: Um vínculo não precisa restringir todos os graus de liberdade de uma estrutura, quem o fará será o conjunto de vínculos.

OBS 2 : As reações desenvolvidas pelos vínculos formam o sistema de cargas externas reativas.

OBS 3 : Somente haverá reação se houver ação , sendo as cargas externas reativas dependentes das ativas, devendo ser calculadas.

B. CLASSIFICAÇÃO

Os vínculos podem ligar elementos de uma estrutura entre si ou ligar a estrutura ao meio externo e, portanto, se classificam em vínculos internos e externos.

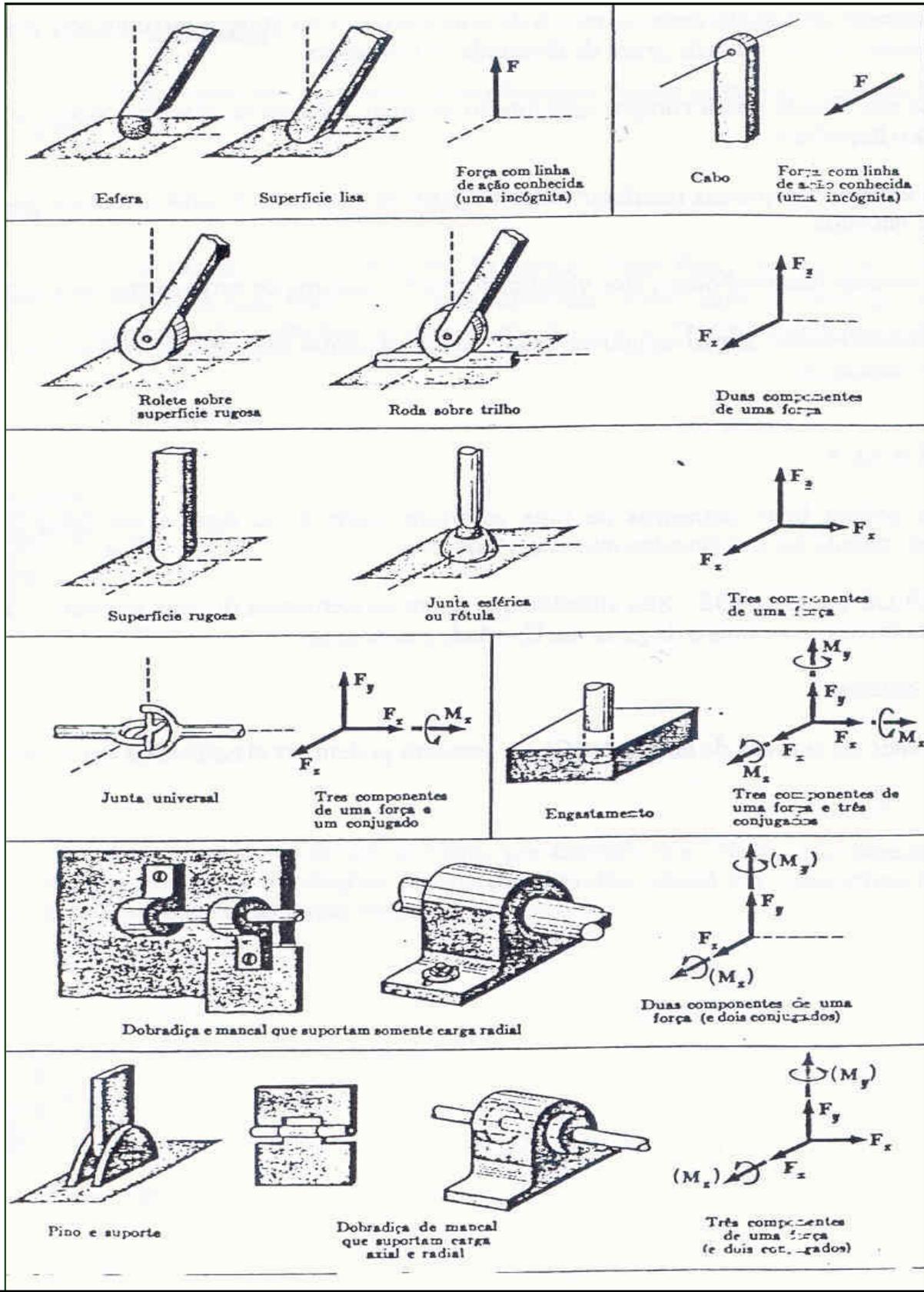
B.1. VÍNCULOS EXTERNOS: São vínculos que unem os elementos de uma estrutura ao meio externo e se classificam quanto ao número de graus de liberdade restringidos..

B.1.a. Caso espacial:

Podem restringir até 6 graus de liberdade (GL) e portanto podem ser classificados em 6 espécies. No quadro abaixo são apresentados alguns exemplos de vínculos externos para o carregamento espacial

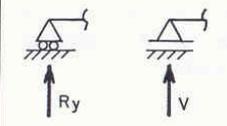
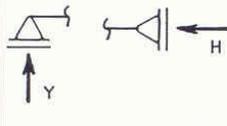
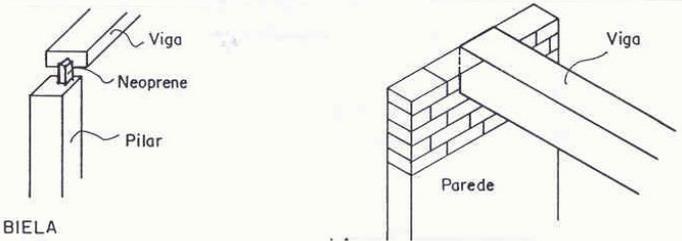
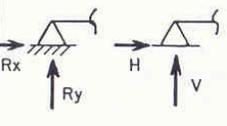
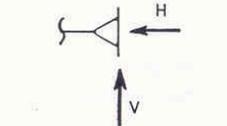
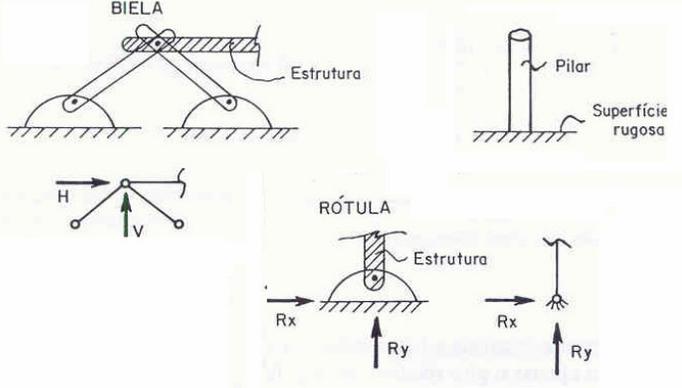
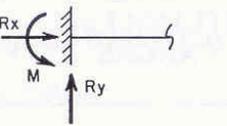
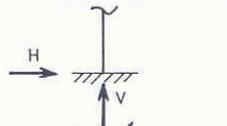
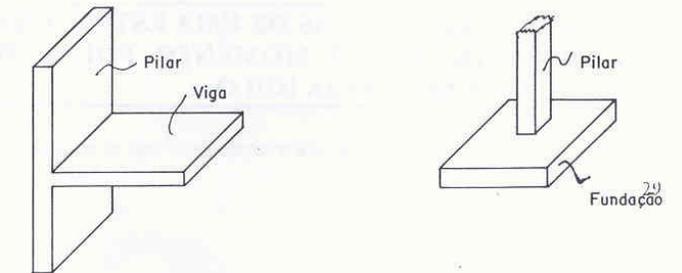


Exemplo de vínculos espaciais:



B.1.b. Caso plano

Nestes casos o vínculo pode restringir até 3 graus de liberdade (GL) e portanto se classificam em 3 espécies.

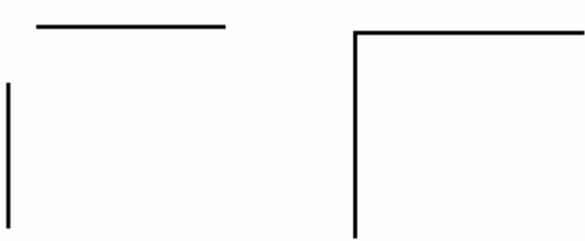
ESPÉCIE	REPRESENTAÇÃO ESTRUTURAL	EXEMPLO
<p>1ª ESPÉCIE OU APOIO SIMPLES</p>  <p>Restringe 1 Translação</p>		
<p>2ª ESPÉCIE OU APOIO DUPLO</p>  <p>Restringe 2 Translações</p>		
<p>3ª ESPÉCIE OU ENGASTE</p>  <p>Restringe 2 Translações e 1 Rotação</p>		

B.2. VÍNCULOS INTERNOS

São aqueles que unem partes componentes de uma estrutura. No caso plano podem ser de 2ª e 3ª espécie.

Ex 1 : Vínculo de 3ª espécie

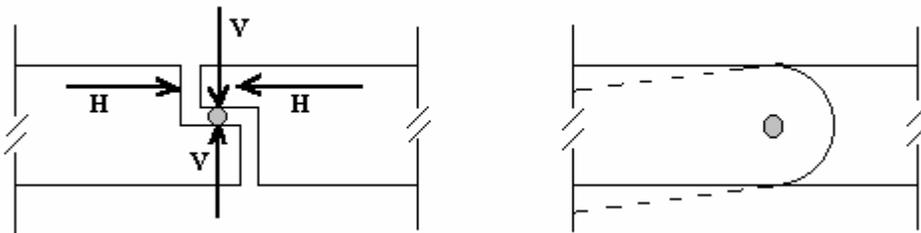
Sejam duas barras livres no espaço com carregamento plano:



Cada barra tem 3 GL ,portanto, juntas somam 6 GL.
Unindo-as rigidamente ,por exemplo, através de uma solda, o número de GL do conjunto passa a ser 3, portanto 3 GL restringidos.

Se chamarmos de RT o número de movimentos restringidos de um sistema teremos neste caso $RT = 3$ (vínculo de 3ª espécie)

Ex 2 : Vínculo de 2ª espécie (PINOS OU RÓTULAS)



Representação Estrutural :

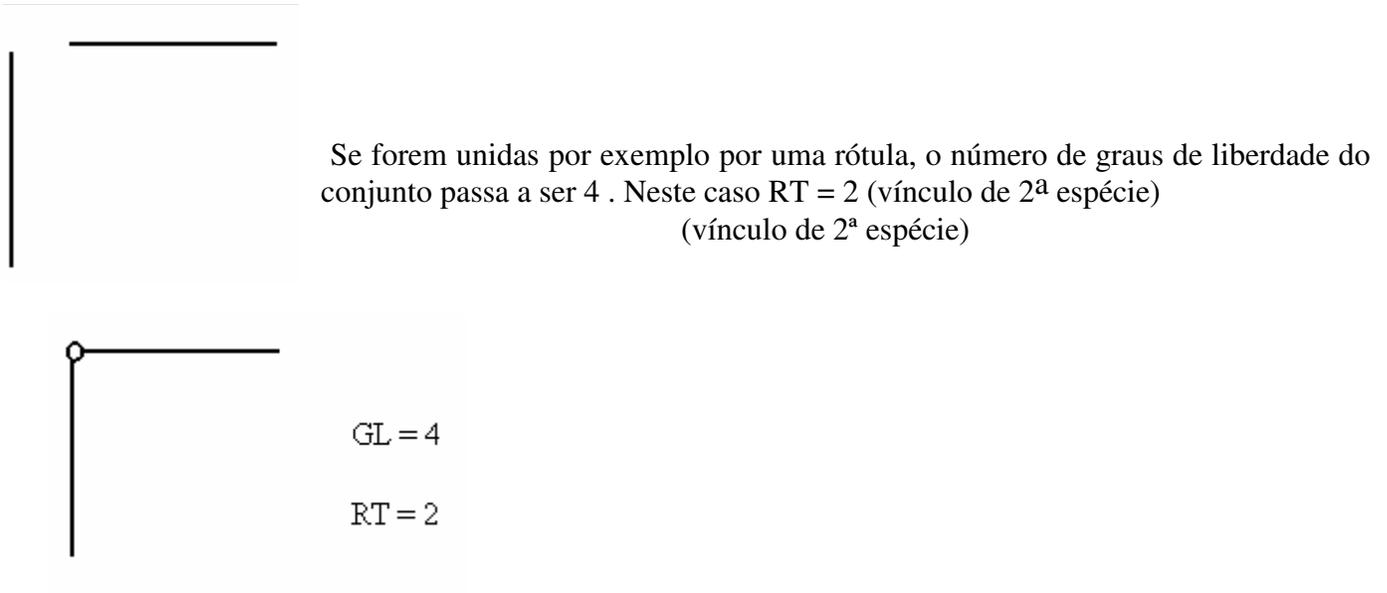


RÓTULAS :

São vínculos que tem reações internas verticais e horizontais podendo transmitir forças nestas direções que se anulam internamente. Permitem apenas o giro relativo entre as barras por ela unidas.

PARA QUE AS RÓTULAS DE UMA ESTRUTURA ESTEJAM EM EQUILÍBRIO É NECESSÁRIO QUE O MOMENTO POLAR DAS CARGAS EXTERNAS EM RELAÇÃO À ELAS SEJA NULO.

EX: Sejam duas barras livres no espaço e submetidas a um carregamento plano. Cada barra possui 3 GL e portanto o conjunto apresenta 6 GL.



III . CLASSIFICAÇÃO ESTRUTURAL

De acordo com a sua estaticidade uma estrutura pode ser:

A. HIPOSTÁTICAS:

Quando o número de movimentos restringidos (RT) for menor do que o número de movimentos rígidos possíveis e independentes (GL) . Uma estrutura hipostática está em equilíbrio instável.

B. ISOSTÁTICA:

Quando o número de restrições (RT) for igual ao número de movimentos possíveis(GL). Uma estrutura isostática está em equilíbrio estável. A eficácia da vinculação deve ser examinada.

C. HIPERESTÁTICA:

Quando o número de restrições (RT) for maior do que o número de movimentos possíveis(GL). Uma estrutura hiperestática está em equilíbrio estável.

IV . VERIFICAÇÃO DO EQUILÍBRIO

A. ESTATICIDADE

De acordo com a classificação já vista podemos dizer que uma estrutura será:

hipostáticas: $RT < GL$

isostáticas: $RT = GL$

hiperestáticas: $RT > GL$

B. GRAU DE CONEXÃO E RETENÇÃO TOTAL DE UMA ESTRUTURA (RT)

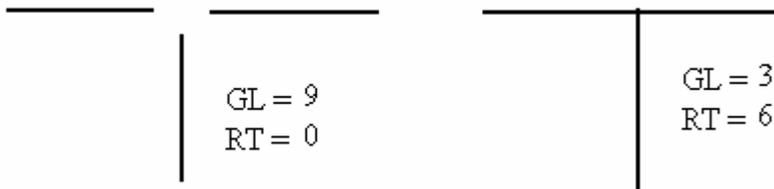
Sejam duas barras livres no espaço com carregamento plano. O número de GL deste conjunto é 6. Se estas barras forem unidas rigidamente por um vínculo interno de 3ª espécie o número de GL passa a ser 3. O número de movimentos restringidos foi 3.

RT = 3

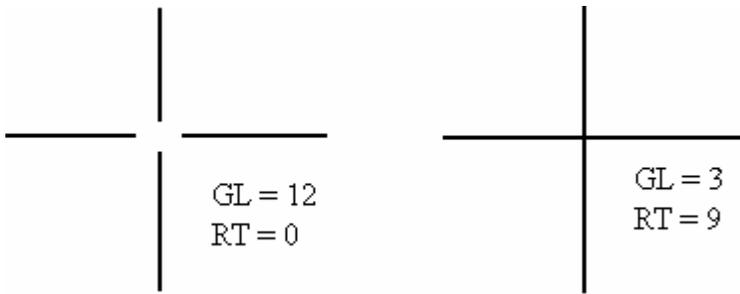


Se possuímos mais de duas barras podemos executar raciocínio idêntico ao anterior, ou seja, se tivermos 3 barras livres o número de GL do conjunto é 9. Ligando-as rigidamente (vínculo de 3ª espécie) o número de GL passa a ser 3, portanto

RT = 6.



ou

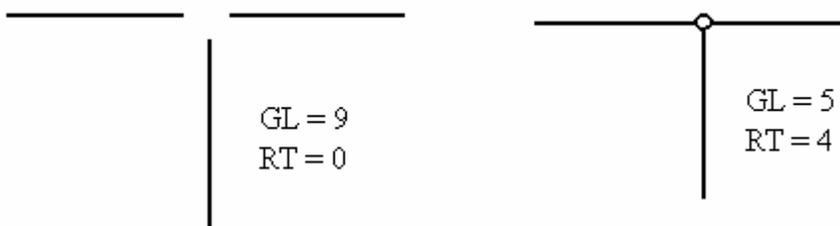


Por outro lado, se tivermos ligado as barras por pinos ou rótulas (vínculos de 2ª espécie) , teremos:

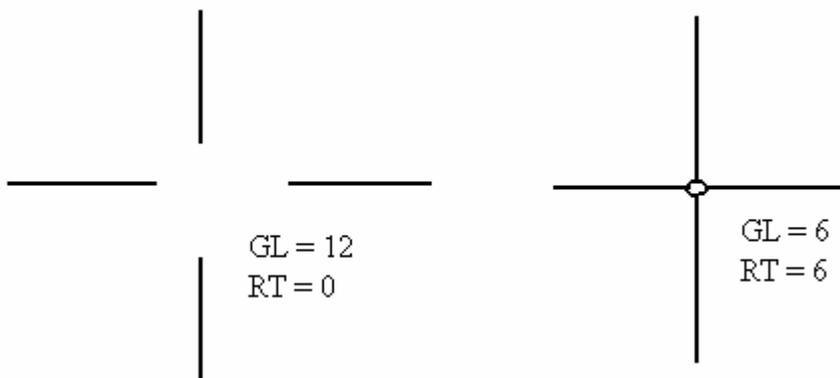
caso de 2 barras:



caso de 3 barras:



ou no caso de 4 barras



Podemos resumir e generalizar da seguinte maneira:

Barras concorrentes em um vínculo	classe do vínculo	RT
2	2	2 x 1
3	2	2 x 2
4	2	2 x 3
2	3	3 x 1
3	3	3 x 2
4	3	3 x 3
n	r	r.(n-1)

O número de movimentos impedidos em um vínculo de classe r onde concorrem n barras é:

$$\boxed{r.(n-1)}$$

n - número de barras que concorrem em um vínculo

(n-1) - grau de conexão de um vínculo

r - número de movimentos impedidos por este vínculo(classe do vínculo)

Chamando:

$C_1 = \sum (n-1)$ - Soma dos graus de conexão dos vínculos de primeira espécie.

$C_2 = \sum (n-1)$ - Soma dos graus de conexão dos vínculos de segunda espécie.

$C_3 = \sum (n-1)$ - Soma dos graus de conexão dos vínculos de terceira espécie

Assim teremos:

$1x C_1$ - número de movimentos impedidos pelos vínculos de primeira espécie

$2x C_2$ - número de movimentos impedidos pelos vínculos de segunda espécie

$3x C_3$ - número de movimentos impedidos pelos vínculos de terceira espécie

Podemos então definir Retenção Total (RT) ou número de movimentos restringidos por todos os vínculos de uma estrutura como:

$$\boxed{RT = 1 x C_1 + 2 x C_2 + 3 x C_3}$$

C. GRAU DE ESTATICIDADE OU GRAU DE HIPERESTATICIDADE (gh)

Podemos definir grau de estaticidade total de uma estrutura como a diferença entre a retenção total e o número de graus de liberdade que ela pode apresentar.

$$g_h = RT - GL$$

No caso plano cada barra livre possui 3 GL logo, se tivermos m barras o número de GL do conjunto será $3 \times m$.

Resulta:

$$g_h = RT - 3m$$

ou

$$g_h = (C_1 + 2.C_2 + 3.C_3) - 3.m$$

Então:

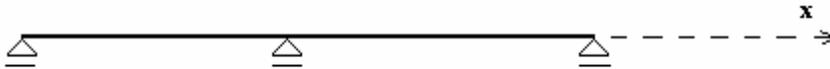
$g_h < 0$ Hipostática

$g_h = 0$ Isostática

$g_h > 0$ Hiperestática

OBS: O exposto acima serve apenas para casos de carregamentos planos e a eficácia vincular deve ser também examinada.

Por exemplo, a estrutura abaixo apresenta $g_h = 0$ porém pode se movimentar na direção x .



D. ESTATICIDADE EXTERNA

Quando quisermos verificar a estaticidade externa de uma estrutura, consideramos a estrutura como um conjunto monolítico, portanto com 3 GL e consideramos apenas as restrições dos vínculos externos, ou seja:

$$g_{ext} = RT_{ext} - 3$$

onde Rt_{ext} é a retenção total somente dos vínculos externos (soma da classe dos vínculos)

E . ESTATICIDADE INTERNA

A estaticidade interna é a diferença entre a estaticidade total e a estaticidade externa.

$$g_{int} = g_h - g_{ext}$$

EXEMPLOS:

Determine o grau de estaticidade total , interno e externo das estruturas abaixo.

1.



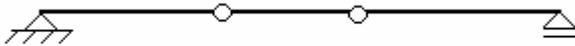
$$\begin{aligned} R: g_h &= 0 \text{ (isostática)} \\ g_{ext} &= 0 \\ g_{int} &= 0 \end{aligned}$$

2.



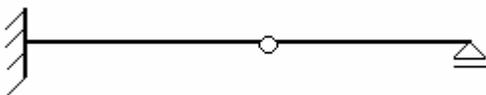
$$\begin{aligned} R: g_h &= 0 \text{ (hipostática) ineficácia vincular} \\ g_{ext} &= 0 \\ g_{int} &= 0 \end{aligned}$$

3.



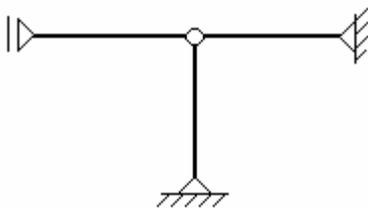
$$\begin{aligned} R: g_h &= -2 \text{ (hipostática)} \\ g_{ext} &= 0 \\ g_{int} &= -2 \end{aligned}$$

4.



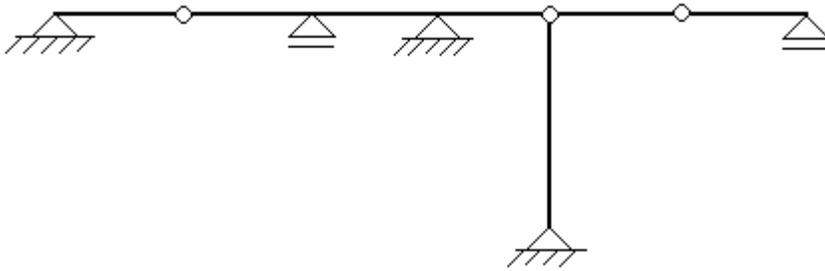
$$\begin{aligned} R: g_h &= 0 \text{ (isostática)} \\ g_{ext} &= 1 \\ g_{int} &= -1 \end{aligned}$$

5.



$$\begin{aligned} R: g_h &= 0 \text{ (hipo- inef vincular)} \\ g_{ext} &= 2 \\ g_{int} &= -2 \end{aligned}$$

6.

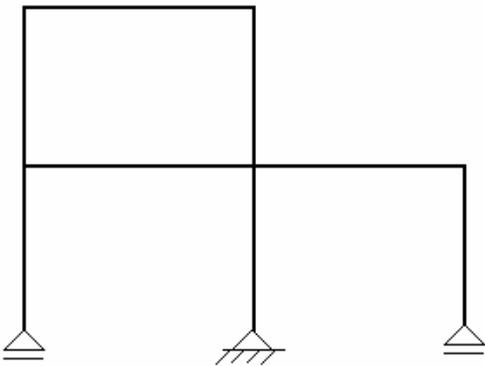


$$R: g_h = 1 \text{ (inef. vinc)}$$

$$g_{ext} = 5$$

$$g_{int} = -4$$

7.

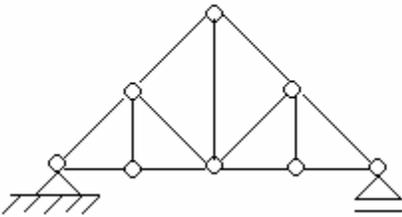


$$R: g_h = 4 \text{ (hiperestática)}$$

$$g_{ext} = 1$$

$$g_{int} = 3$$

8.



$$R: g_h = 0 \text{ (isostática)}$$

$$g_{ext} = 0$$

$$g_{int} = 0$$

9.

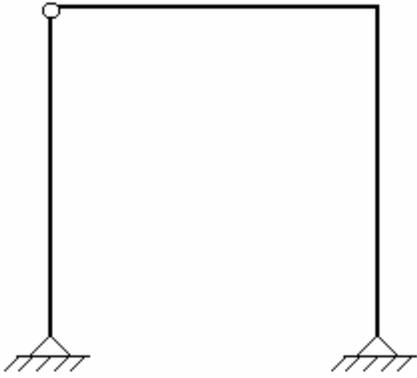


$$R: g_h = 3 \text{ (hiperestática)}$$

$$g_{ext} = 3$$

$$g_{int} = 0$$

10.



R: $g_h = 0$ (isostática)

$g_{ext} = 1$

$g_{int} = -1$